সরল ছন্দিত স্পন্দনের সমীকরণ থেকে শক্তির কোয়ান্টায়িত হওয়ার সমীকরণ প্রতিপাদন

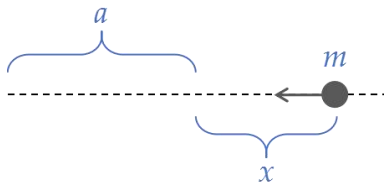
কে. এম. শরীয়াত উল্লাহ [a]

সারাংশ

কৃষ্ণবস্তুর বিকিরণ শক্তির ব্যাখ্যা দিতে ক্ল্যাসিকাল মেকানিক্স ব্যার্থ। সেই সীমাবদ্ধতা দূর করতে ১৯০৫ সালে ম্যাক্স প্ল্যাঙ্ক শক্তির কোয়ান্টায়ন বিষয়টি আমাদের সামনে আনেন। তিনি দেখান $E=hf$। এই সূত্রটিকে খুব সহজেই সরল ছন্দিত স্পন্দনের সমীকরণ থেকে প্রমাণ করে আনা যায় [1]।

সূচনা

বোর পরমাণু মডেলের কথা চিন্তা করি। উচ্চ শক্তির কক্ষপথ থেকে কোনো একটি ইলেকট্রন যদি নিম্ন শক্তির কক্ষপথে যায় তাহলে সে কিছু শক্তি বিকিরণ করে। অন্যদিকে নিম্ন শক্তির কক্ষপ্তহ থেকে কোনো একটি ইলেকট্রন যদি উচ্চ শক্তির কক্ষপথে যায় তাহলে সে কিছু শক্তি শোষণ করে। এই শোষিত বা বিকিরিত শক্তি ইলেকট্রো-ম্যাগনেটিক তরঙ্গের শক্তি হিসেবে শোষিত বা বিকিরিত হয়। এই শক্তির পার্থক্য অনুসারেই শোষিত বা বিকিরিত ইলেকট্রো-ম্যাগনেটিক তরঙ্গের ফ্রিকুয়েন্সি নির্ধারিত হয়। এটিই $E=hf$ সূত্র থেকে বোঝা যায়।



চিত্র : m ভরের একটি কণা একটি সরলরেখা বরাবর a বিস্তার নিয়ে সরল ছন্দিত স্পন্দনে রয়েছে।

সূত্রের প্রতিপাদন

ধরি m ভরের চার্জিত একটি কণা একটি নির্দিষ্ট অক্ষ বরাবর সরল ছন্দিত স্পন্দন গতিতে গতিশীল। এর বিস্তার a। এটি f ফ্রিকুয়েন্সি বা ω কৌণিক বেগ নিয়ে কণাটি চলমান। যে-কোনো সময় t পরে তার অবস্থান x। এটির দশাকোণ যদি ψ হয় তাহলে কণাটির অবস্থানের সমীকরণ হবে,

$$x = a\cos(\omega t + \psi) \tag{1.1}$$

বেগের মান হবে,

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega a \sin(\omega t + \psi) \tag{1.2}$$

রৈখিক ভরবেগের মান হবে,

$$p = mv = -m\omega a \sin(\omega t + \psi) \tag{1.3}$$

আমরা জানি,

$$\sin^2(\omega t + \psi) + \cos^2(\omega t + \psi) = 1$$

[a] শিক্ষার্থী, ইলেকট্রিকাল ও ইলেকট্রনিক ইঞ্জিনিয়ারিং বিভাগ, শাহজালাল বিজ্ঞান ও প্রযুক্তি বিশ্ববিদ্যালয়, সিলেট, ই-মেইল : cast.shariat@gmail.com

$$\frac{p^2}{(m\omega a)^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \tag{1.4}$$

সমীকরণ (1.4) একটি উপবৃত্তের সমীকরণের সাথে তুলনীয় যার x অক্ষ বরাবর ভরবেগের মান ও y অক্ষ বরাবর সাম্যবস্থা থেকে কণার সরণ বুঝাবে। ওই উপবৃত্তের বৃহদাক্ষের মান $m\omega a$ আর ক্ষুদ্রাক্ষের মান a।
যখন $\sin(\omega t + \psi) = 1$ হয় তখন $v = -\omega a$ হয়। এই অবস্থায় কণাটির সমস্ত শক্তি গতিশক্তি হিসেবে সঞ্চিত থাকে এবং এর কোনো স্থিতিশক্তি থাকে না। তাই কণাটির মোট শক্তি,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(-\omega a)^2 = 2\pi^2 f^2 a^2 m \tag{1.5}$$

আমরা যে উপবৃত্তটি নিয়ে এতক্ষণ কাজ করছিলাম সেই উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল

$$A = \pi(m\omega a)(a) = 2\pi^2 f a^2 m \tag{1.6}$$

এই ক্ষেত্রফলটির সাথে শক্তির সম্পর্ক হচ্ছে,

$$A = \frac{E}{f}$$

$$\text{বা, } E = fA \tag{1.7}$$

এই ক্ষেত্রফল দেখেই মূলত ম্যাক্স প্লাঙ্ক প্রথমবারের মতো হাইপোথিসিস দাড় করান শক্তির মান কোয়ান্টায়িত। এই অবস্থায় উপবৃত্তের ক্ষেত্রফলের মান একটি ধ্রুবক হয় ও একে প্ল্যাঙ্কের ধ্রুবক (h) নামকরণ করা হয়। তাই,

$$E = hf$$

আজ আমরা নানা পরীক্ষা-নিরিক্ষার মাধ্যমে শক্তির কোয়ান্টায়নের সত্যতা খুঁজে পাই।

তথ্যসূত্র

[1] White, H. E. (1934). *Introduction to atomic spectra.*